Concours des 24, 25 et 26 mai 1983 d'admission en 1ère année à l'Institut National des Télécommunications

MATHEMATIQUES (option M)

Hypothèses et notations

Le corps de base est $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients complexes. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, P' désigne le polynôme dérivé.

Si $R = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle ($P, Q \in \mathbb{C}[X]$), on supposera toujours que R est mise sous forme irréductible : P et Q n'ont pas de zéros communs. Les pôles de R sont les zéros de Q.

La lettre x désigne une variable réelle.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On pose lorsque les limites considérées existent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X \to -\infty} \int_{X}^{a} f(x)\,dx + \lim_{Y \to +\infty} \int_{a}^{Y} f(x)\,dx$$

a étant un réel quelconque, X et Y deux variables réelles indépendantes

$$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_{c}^{X} f(x)\,dx \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{c} f(x)\,dx$$

L'existence d'une intégrale d'une fonction continue sur un intervalle non borné devra toujours être justifiée.

Il pourra être commode d'utiliser la fonction sgn, définie pour $x \neq 0$ par

$$\operatorname{sgn} x = x/|x|$$

I - 1°) Soit a un nombre complexe ayant une partie imaginaire non nulle. Calculer pour tout entier $q > 0$

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} \frac{dx}{(x-a)^q}$$

Soit p un entier positif ou nul tel que $p < q$. En utilisant le résultat précédent, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} \frac{x^p}{(x-i)^q}\,dx \quad \text{et} \quad \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} \frac{x^p}{(x+i)^q}\,dx$$

2°) Soit $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle sans pôles sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$

Montrer que $\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} R(x)\,dx$ existe. Exprimer cette limite en fonction des coefficients de la décomposition de R en éléments simples sur le corps des complexes :

.../...

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{A_{kj}}{(x - a_k)^j}$$

3°) Calculer A_{kj}, lorsque a_k est un zéro simple de Q, en fonction de P et de Q'.

Application : Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}$ pour tout entier $n > 0$.

(On donnera une forme aussi ramassée que possible du résultat et on vérifiera qu'il est strictement positif).

II - On suppose dans toute cette partie que $R = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que $\lim_{x \to \infty} x R(x) = 0$.

1°) On suppose que Q a un seul zéro réel α et que ce zéro est simple.

a - Soit ε un réel strictement positif, vérifier l'existence des nombres

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{\alpha-\varepsilon} R(x)\,dx \quad \text{et} \quad \lim_{X \to +\infty} \int_{\alpha+\varepsilon}^{X} R(x)\,dx$$

b - soit ρ un réel positif tel que $\rho > \varepsilon$. Calculer :

$$\int_{\alpha-\rho}^{\alpha-\varepsilon} \frac{dx}{x - \alpha} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\alpha+\rho} \frac{dx}{x - \alpha}$$

En déduire que pour tout $\rho > 0$ la limite suivante est définie :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\alpha-\rho}^{\alpha-\varepsilon} R(x)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\alpha+\rho} R(x)\,dx \right)$$

c - Démontrer l'existence du nombre

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\alpha-\varepsilon} R(x)\,dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^{+\infty} R(x)\,dx \right)$$

Ce nombre sera noté $\oint_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$

d - On pose $S(x) = R(x) - \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(x - \alpha)}$

Démontrer que la limite suivante existe $\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} S(x)\,dx$. En déduire une expression du nombre $\oint_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ en fonction d'une intégrale contenant S.

Exemple : Calculer $\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha)(x^2 + 1)}$.

.../...

2°) On suppose maintenant que Q a n zéros réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, rangés par ordre croissant : $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, et que ces zéros sont simples.

a - Soit ε un réel strictement positif. Démontrer l'existence du nombre, noté $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ et défini par :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_1 - \varepsilon} R(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\alpha_j + \varepsilon}^{\alpha_{j+1} - \varepsilon} R(x)\,dx + \int_{\alpha_n + \varepsilon}^{+\infty} R(x)\,dx \right)$$

b - On pose $B_j = P(\alpha_j)/Q'(\alpha_j)$ $\quad (1 \leq j \leq n)$ et $S(x) = R(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{x - \alpha_j}$

Vérifier que pour tout réel $r > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\alpha_1 - r} R(x)\,dx + \int_{\alpha_n + r}^{+\infty} R(x)\,dx + \int_{\alpha_1 - r}^{\alpha_n + r} S(x)\,dx + \sum_{j=1}^{n} B_j \operatorname{Log} \frac{\alpha_n - \alpha_j + r}{\alpha_j - \alpha_1 + r}$$

c - Montrer que $\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} S(x)\,dx$ existe et en déduire comme dans le 1°) une expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ en fonction d'une intégrale contenant S.

Exemples : Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x^2 + 1)}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n} - 1}$ où n est un entier positif.

3°) On note E l'ensemble des fractions rationnelles $R = \frac{P}{Q}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $\lim_{x \to +\infty} x\,R(x) = 0$

ii) Si Q a des zéros réels ces zéros sont simples.

- Vérifier que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Si $R \in E$ n'a pas de zéro réel on pose $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$.

- Soit $R \in E$ et $R_1 \in E$, démontrer la relation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[R(x) + R_1(x) \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(x)\,dx$$

4°) Soit $R \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et m un nombre réel non nul.

Démontrer les formules suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x + \lambda)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(mx)\,dx = |m|^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

Application : Soit $x^2 + 2cx + d$ un trinôme à coefficients réels dont le discriminant est négatif. Calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 2cx + d)^2}$$